CAMBIOS EN FIGURAS DE ÁREA IGUAL, CONSERVACIÓN Y RELACIONES FIGURALES

María Victoria Popoca Yáñez, Claudia Acuña Soto

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal (México)

mvpopoca2@hotmail.com, claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen. Esta investigación indaga cómo los estudiantes de bachillerato enfrentan tareas de identificación de áreas iguales en figuras geométricas que cambian de posición, forma o son reconfiguradas. Nos apoyamos en manipulables para representar las figuras de área igual y la comparación se hizo luego que hemos dibujado, cortado y doblado las figuras. El problema de la conservación del área aparece junto con la del perímetro. Nuestra exploración nos sugiere que el reconocimiento del área igual se dificulta conforme aumenta el número de cortes, también observamos que la estimación del perímetro es global. En general el estudiante observa la figura por su apariencia y aspecto global, en ausencia de sus propiedades figurales, por tanto no pueden establecer las relaciones matemáticas.

Palabras clave: relación área-perímetro, conservación del área, reconfiguración, propiedades figurales

Abstract. This research was carried out in order to learn how high school students face identification tasks of equal areas in different geometrical figures when these change position, shape or they are reorganized. We used objects of equal areas that could be manipulated and comparisons were made after they were cut, pasted and folded. The area conservation problems and the perimeter´s problem are presented subsequently. Our research suggests that recognition of equal area becomes increasingly difficult as the number of cut's inflicted to the objects increase and that global estimation of the perimeter occurs. In general, students support their impressions of the shape based on its appearance without taking into account its properties as a shape and cannot establish mathematic relations.

Key words: area-perimeter relationship, area conservation, reorganized by cuts, figural properties

Antecedentes

Los conflictos presentados por los estudiantes respectos a la relación área-perímetro se reconoce desde el punto de vista de la epistemología desde hace mucho tiempo, y es considerado ya en la literatura de la matemática educativa como el tipo de dificultades que se consideran como obstáculos conceptuales en Rogalski (1979) esta relación ha sido estudiada por ejemplo relacionadas a cierto tipo de razonamiento geométrico en particular apoyados en la teoría de niveles de pensamiento geométrico de van Hiele en Gutiérrez (1998) o más contemporáneamente se incluyen en las variables de investigación consideraciones como las concepciones de los estudiantes D'Amore et al (2007) quienes afirman que los problemas no sólo son epistemológicos sino también didácticos.

stos resultados de investigación se formulan al margen de la intervención de la computadora que ha puesto a la disposición de la enseñanza gran cantidad de recursos que implican nuevas perspectivas en las que no abundaremos en este trabajo.

En el presente caso, sin embargo deseamos observar esta relación con manipulables de doblado y recortado de papel en donde la conservación de áreas se postula a partir de un trabajo de reconfiguración debido a que una de las características figurales que los estudiantes deberían estar en condiciones de observar es la de la igualdad de áreas en dos figuras de forma y posición distinta, especialmente si se trata del mismo objeto el cual ha sido manipulado frente a sus ojos.

La enseñanza de la geometría en el bachillerato requiere que el estudiante conozca no sólo las figuras geométricas con las que se le ha familiarizado desde la primaria, sino que sea capaz de identificar sus características y establecer las relaciones entre sus propiedades

Marco teórico y pertinencia de constructos de investigación

Para enfocar mejor los significados asociados a las figuras geométricas, nos referiremos a las llamadas representaciones en la matemática. Consideramos que todo concepto matemático requiere de representaciones, ya que no tenemos acceso directo a estos, sino que realizamos una evocación de ellos.

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas en las que se emplean signos, son un medio con el que un individuo comunica sus ideas. En el caso de la matemática llamamos objetos matemáticos de los que Godino y Batanero, (1994) dicen "El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos" (p.335).

De acuerdo con Duval (1999 y 2006), es necesario diferenciar el objeto matemático de sus representaciones semióticas, debido a que el objeto representado nunca se puede reducir a su representación, por ello, el cambio de forma y posición establece en el estudiante por un lado la idea del reconocimiento de la figura cuando esta no está alineada como de costumbre o se trata de una figura distinta a la del prototipo.

Las representaciones pueden tomar la forma de manipulables, siempre que se les de el tratamiento matemático respectivo y este no se centre en las propiedades que les confiere su corporeidad.

Considerando los niveles de pensamiento de van Hiele, Jaime y Gutiérrez (1990) el tratamiento del objeto de estudio de este trabajo, se puede colocar en el nivel **1** donde el conocimiento es puramente físico y visual, se perciben las figuras geométricas de forma global y como objetos individuales, los estudiantes en este nivel no son capaces de generalizar.

Este acercamiento didáctico corresponde al paradigma de la Geometría Natural desde el punto de vista de los espacios de trabajo de Houdement y Kuzniak (2006) quienes consideran tres paradigmas de ellos: la intuición, la experiencia y el razonamiento deductivo, este trabajo se sitúa en el primero debido a que la se uso la intuición, entendida como evidencia, para dar forma a la estructura de pensamiento geométrico.

De manera que en esta investigación se considera la importancia de la transformación de la figura en posición, forma y sentido a través de manipulables que serán modificados conservando el área y variando el perímetro con base en la intuición y la experiencia, por lo que el desarrollo de las actividades se encuentra dentro de la Geometría Natural antes mencionada.

Mientras que lo referente a los distintos tratamientos a la figura geométrica encontramos que Duval (1995) se refiere a cuatro distintos tipos de aprehensiones: perceptual, secuencial, discursivo y operativo, en este trabajo haremos uso de la aprehensión perceptual para identificar la figura, secuencial en la transformación de la figura, del discursivo al expresar estos cambios, pero no del operatorio.

Metodología

La idea del área que requerimos en el nivel bachillerato, no está relacionada solamente con su cálculo, sino con tratamientos como el de la comparación. Decidir cuándo tenemos más área y cuándo menos, es un trabajo que hace que el estudiante centre su atención en el área pensada como superficie confinada. Esta idea no es una habilidad desarrollada, tan frecuentemente como es necesario en el trabajo en clase.

La estrategia de trabajo que usaremos para la conservación del área es la llamada recomposición de figuras en donde se requiere de un tratamiento figural del objeto que debe ser transformado en términos de tus propiedades de representación actual. Para indagar, cómo se lleva a cabo la identificación del área igual en figuras a las que se han transformado con base en la forma, la posición y la recomposición de la figura, usamos cuestionarios y manipulables. Por otro lado, la idea de área está muy relacionada con la idea de perímetro, por tal razón, las actividades propuestas involucran en un inicio estos dos elementos, en otro momento sólo observaremos el área a través del doblado de papel donde hacemos trabajos de recomposición.

Los datos se obtuvieron con base en las respuestas a los cuestionarios, las sesiones fueron filmadas y transcritas, además se desarrollaron algunas entrevistas para profundizar y aclarar algunas de las respuestas.

Las actividades se llevaron a cabo con 25 alumnos de primer semestre (de 15 años de edad) y 25 alumnos de tercer semestre (de 16 años de edad), esto es con el propósito de comparar sus niveles de razonamiento. Las tres actividades que se trabajaron fueron las mismas para cada grupo y ambos grupos ya trabajaron el tema de perímetro y área. A cada actividad se le dedicó una sesión. La primera duró una hora, y las otras dos, hora y media cada una.

Los contenidos y propósitos de las actividades diseñadas son los siguientes:

Actividad 1: Esta actividad es de diagnóstico, donde se trata de indagar sobre el significado que hasta ahora tienen sobre área y perímetro de una figura plana. En particular si se cambia la posición de las figuras y cuando se hace una recomposición sencilla. Las preguntas planteadas se refieren al área y al perímetro de figuras básicas, hacen comparaciones entre estas al cambiar de posición y forma cuando se usa la recomposición.

Actividad 2: El trabajo aquí es en forma de taller donde, aumentando el grado de dificultad, analizan las figuras y las transforman al recortarlas y unirlas. Mientras forman nuevas figuras, siguen comparando áreas y perímetros, e incorporamos la idea de porción de área.

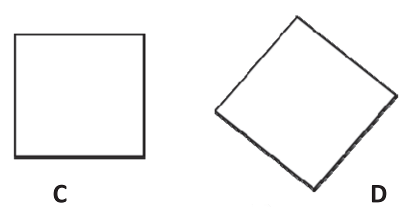
Actividad 3: Se trabaja en forma de taller, pero ahora con doblado de papel. Se hace mayor énfasis en la idea de porción de área, de tal forma que las acciones que se efectúan van dirigidas a mostrar la igualdad de áreas entre tres figuras transformadas por recomposición. En esta actividad, a diferencia de las dos anteriores, además de hacer doblados de papel, el alumno debe de considerar las propiedades figurales para que lleguen a percibir la igualdad de áreas y dar sus justificaciones correspondientes. Para esto, primero se debe identificar la cantidad de área que queda después de cada división que se hace al cuadrado de papel cuando este se va doblando. La principal diferencia de esta actividad y la anterior es que hay información que no está a la vista, para poder indagar qué tan adecuados tienen sus referentes sobre las propiedades figurales.

A continuación mostraremos algunos ejemplos con sus respectivos resultados para cada actividad. En adelante g-A y g-B se refieren al grupo de 15 años y al de 16 años respectivamente.

ACTIVIDAD 1: de diagnóstico

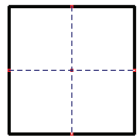
En particular si se cambia la posición de las figuras

¿Son iguales las áreas de las figuras **C** y **D**?
Respuestas: Si g-A: 84 %, no g-B: 68%
Pregunta 2c) ¿Y sus perímetros son iguales?
Respuestas: Si g-A: 88 %, no g-B: 92%

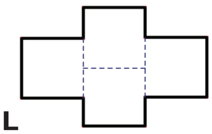


Cuando se hace una recomposición sencilla

Si a la figura **K** le hacemos dos cortes sobre las líneas punteadas y con las piezas formamos la figura **L**, ¿son iguales las áreas de **K** y **L**? Respuestas: Si g-A: 56%, no g-B: 68%



K



L

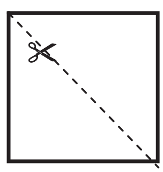
c. ¿Qué figura tiene mayor perímetro? Respuestas: La L g-A: 44% g-B: 92% ;
La K g-A: 36% g-B: 8%

Las evidencias obtenidas nos mostraron que en estas figuras elementales no hay grandes dificultades en la apreciación de la conservación del área cuando estas cambian de posición y forma.

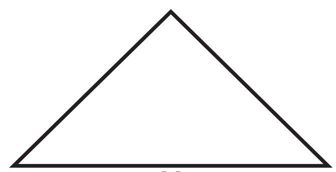
ACTIVIDAD 2: Taller de recorte

En el caso de una recomposición

La figura **G** de "fomy" es un cuadrado. Recorta sobre una de sus diagonales como se ve en la figura, y con las 2 piezas que te quedan forma el triángulo **H**.



G



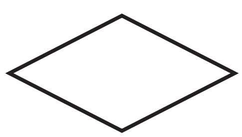
H

a) ¿Tienen áreas iguales las figuras **G** y **H**? Respuestas: Si g-A: 84% g-B: 68%

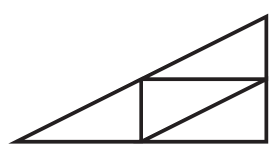
Observación: Los "No", argumentaron, por ejemplo, que al ser diferentes figuras, se usa diferente fórmula para calcular el área.

c) De las figuras **G** y **H**, ¿cuál tiene mayor perímetro? Respuestas: La H; g-A: 72% g-B: 64%

Hacer dos cortes al rombo **I** de "fomy", de tal forma que con todas las piezas que obtengas, puedas formar el triángulo **J**. Como se ve en la figura.



I



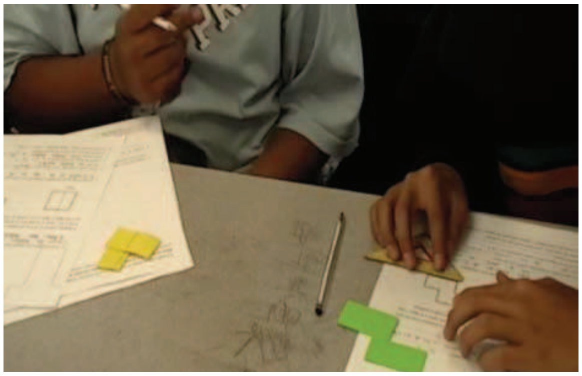
J

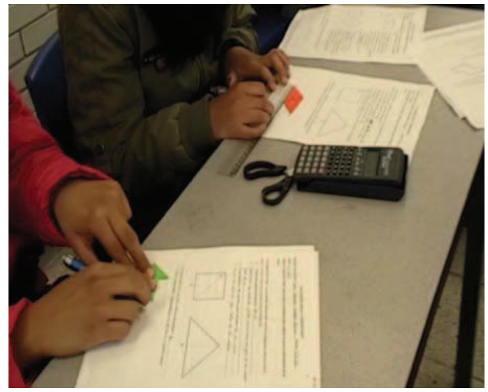
a) ¿Cómo son estas áreas entre si? Contestaron correctamente: g-A: 44% g-B:76%

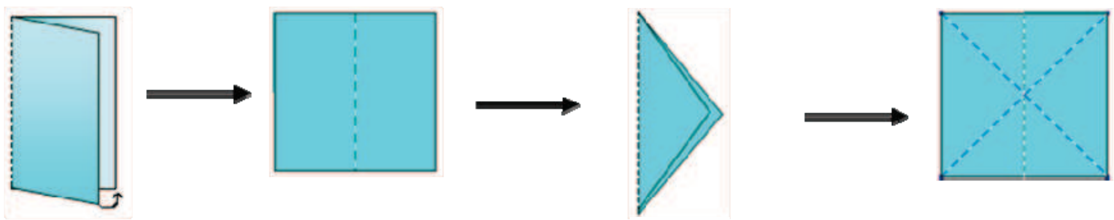
b) ¿Cuál tiene mayor perímetro? Contestaron correctamente: g-A: 32% g-B:72%

Podemos observar que los porcentajes van cambiando en los casos anteriores los pedazos a ensamblar aumenta y la certeza sobre la igualdad disminuye, de manera que la idea del todo es una idea enraizada para toda situación de corte.

En las siguientes imágenes se puede observar como los alumnos usan herramientas de cálculo en lugar de utilizar las propiedades de las figuras.



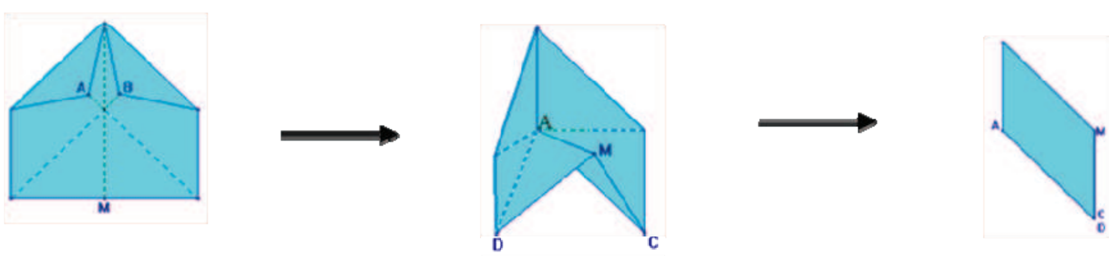




Las evidencias muestran que varios alumnos observaron la figura por su apariencia, sin considerar las indicaciones dadas para sus particiones.

Por ejemplo en cierto momento, al indicarles "llevando los vértices A y B hacia el centro del cuadrado, y presiona fuertemente sobre los dobleces. El área de la pieza resultante ¿qué parte es del área del *cuadrado original?*"

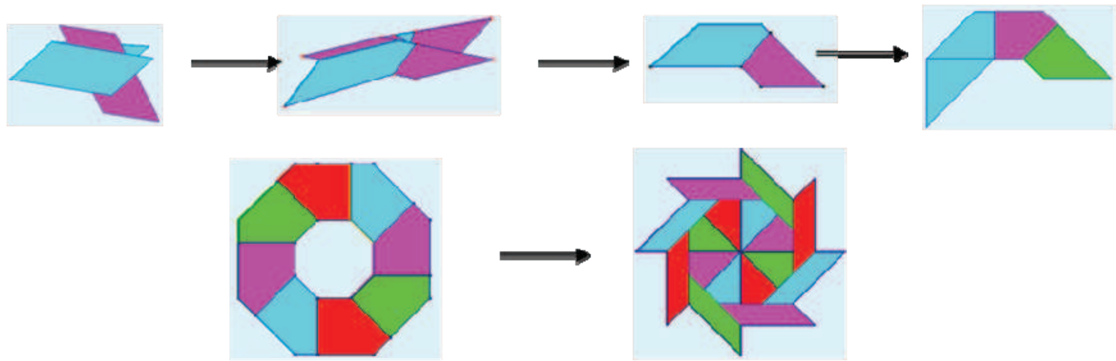
Contestaron correctamente: g-A: 50% g-B: 63.6%



Pero, en la pregunta 5 a) El área de la pieza que finalmente obtuviste ¿qué parte es del área del *cuadrado original*? Contestaron correctamente: g-A: 66.7%; g-B: 90.9%

A pesar de que a varios alumnos se les dificulta encontrar la figura útil para dar sus respuestas, esto es debido a que no tienen a la vista la información que les servirá para llegar al resultado deseado, al final contestan correctamente basándose más en su intuición.

Al continuar con la actividad, finalmente realizan varios dobleces más para obtener finalmente la dona octagonal plana que se puede transformar en una estrella.



El objetivo de esta actividad es que lleguen a la conclusión de que el área del cuadrado de papel original es igual al área de la dona y también es igual al área de la estrella y que pasen por los distintos tipos de aprehensión. Los alumnos por si solos no perciben la conservación del área de las partes de una figura, y llegar a la conclusión deseada, mucho menos.

Análisis de las respuestas

Observamos que las respuestas son determinadas por una apreciación global, la idea del todo y las partes, en estos casos no son homogéneas, de manera que el elemento determinante en la identificación de la recomposición se apoya en una observación sobre la cantidad de piezas y cortes de cada tarea siendo más difícil de identificar conforme estos aumenten, es decir, la reconfiguración del área es una tarea que se ve afectada por las concepciones de los estudiantes en lo referente a la mayor dificultad de identificación.

Ante esa situación los recursos de nuestros estudiantes regresan a los ámbitos conocidos como el del cálculo cuando se afirma que: "*al recomponer una figura sus áreas eran diferentes porque al ser figuras diferentes las fórmulas para calcular sus áreas también deben ser diferentes*".

No se apoyan en las propiedades figurales que les permitirían hacer una comparación, porque en principio tampoco reconocen su relevancia en este tipo de problemas que sería lo esperado debido a que la tarea se encuentra colocada dentro de la geometría Natural.

En el caso del perímetro la frecuencia de resultados correctos es mayor, ya sea porque los estudiantes consideran que la figura "*tiene más lados*", "*es más grande*" o porque pusieron más cuidado considerando que la solución no era trivial donde podemos observar una preponderancia de cálculos aritméticos y el uso de calculadora. El realizar estas acciones las denominamos "pensamiento numérico", mientras que el hecho de involucrar las relaciones figurales lo identificamos como "pensamiento geométrico". Estas denominaciones de pensamiento tiene algunos aspectos similares a los modos de pensamiento teórico y práctico desarrollado por Sierpinska, et al. (2002).

Conclusiones

Las dificultades generadas por el cambio de posición y de forma de las figuras, tienen una explicación parecida a la obtenida en las reconfiguraciones, en las situaciones sencillas, es decir con pocos cortes las respuestas suelen ser correctas. No así en los casos en donde lo trascendente es la comparación de las unidades figurales para obtener los resultados, es decir con una visión global de las figuras no pueden hacer comparaciones locales que son las que les permitirían resolver correctamente las tareas planteadas.

En la recomposición de figuras, podríamos afirmar que la dificultad en la comparación de áreas y perímetros se relaciona con la situación de la tarea, es decir, tenemos que en la tarea de doblado, algunas de las partes no son visibles por la superposición de las piezas que forman la estructura final.

Además, parece que nuestros estudiantes no aceptan la idea de que la figura es la misma que está siendo transformada frente a ellos, porque él área, al parecer, depende de la forma que toma, si esta cambia, el área también.

Encontramos que el pensamiento numérico está más arraigado que el geométrico cuando pierden la ruta para resolver las comparaciones figurales, en particular, la comparación del perímetro fue acompañada de mediciones y asignación de valores a través de lo cual daban sentido a la tarea.

El pensamiento numérico está más arraigado que el geométrico. Aplican argumentos intuitivos de la forma: “A más A, más B”. Por ejemplo: “*Si tienen la misma área entonces tendrán el mismo perímetro*”, la figura “*tiene más lados*” ó “*es más grande*”.

El reconocimiento de las propiedades figurales de las representaciones de los objetos geométricos, resulta relevante para estar en condiciones de hacer comparaciones de figuras de área igual que han sido transformadas mediante cambio de forma, posición o recomposición, la observación de el cambio de dimensión de los elementos figurales de las representaciones y la apreciación global-particular emerge como un prerrequisito no sólo para observar la igualdad sino para el tratamiento correcto de las representaciones en geometría.

Observamos que la aprehensión perceptual de la figura conforme se van dando los cambios tiende a perder seguridad sobre lo observado, las conclusiones que deberían ser directas, tienden a ser más inciertas.

La aprehensión secuencial, en este caso no proporciona información sobre las transformaciones sufridas por la figura para la conservación del área.

Finalmente la aprehensión discursiva no pudo ser desarrollada por nuestros estudiantes debido a la falta de certeza sobre sus afirmaciones

Referencias bibliográficas

CCH, UNAM. Planes de estudio, (s.f.). Extraído el 20 de abril de 2011 desde http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté S.A. de C.V.

D'Amore, B. & Fandiño, M.I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. l0-1, 39-68. México.

Duval, R. (1995), Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlín: Springer.

Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. pp. 147-174.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación. *La gaceta* de la RSME, 9.1 pp.143-168.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, (3), pp. 325-355.

Gutiérrez, A. (1998): *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización* (texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM-98. Centre de Recerca Matemática, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscrito.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, pp. 175 – 193.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Linares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática, (*pp. 295-384). Sevilla Spain: Alfar.

Popoca, V. (2009). *Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rogalski, J. (1979) Quantités physiques et structutes numeriques. Mesures et quantificatio: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de L'APMEP* 320, pp. 565-586

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra.* Reporte de investigación, Universidad de Concordia, Canadá. Obtenido de http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf